ÜBER DIE ZUSAMMENHÄNGE ZWISCHEN GEWISSEN HÖHEREN DIFFERENZEN-QUOTIENTEN REELLER FUNKTIONEN EINER REELLEN VARIABLEN UND DEREN DIFFERENZIERBARKEITSEIGENSCHAFTEN

INAUGURAL-DISSERTATION
ZUR
ERLANGUNG DER DOKTORWÜRDE

GENEHMIGT VON DER PHILOSOPHISCHEN FAKULTÄT
DER
FRIEDRICH-WILHELMS-UNIVERSITÄT ZU BERLIN

VON

EBERHARD HOPF

TAG DER PROMOTION: 9. FEBRUAR 1926

BERLIN 1926

NORDDEUTSCHE BUCHDRUCKEREI UND VERLAGSANSTALT A.-G., BERLIN SW 48

REFERENTEN:
PROF. DR. E. SCHMIDT
PROF. DR. J. SCHUR

Meinen lieben Eltern
in Dankbarkeit gewidmet
vom Verfasser.

Einleitung.

In der mathematischen Literatur begegnet man zuweilen gewissen Ausdrücken, die man als höhere Differenzenquotienten einer Funktion f(x) bezeichnen kann, da zwischen ihnen und den höheren Ableitungen von f(x) ein ähnlicher Zusammenhang besteht wie zwischen den ersten Differenzenquotienten und der ersten Ableitung f'(x). Wir bilden mit Hilfe von $n+1$ von einander verschiedenen Zahlen $x_0, x_1, \ldots, x_n$ und einer an diesen Stellen erklärten Funktion f(x) den in den x_ν symmetrisch gebauten Ausdruck

$$[x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f = n!\,\frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}$$

und nennen ihn einen n-ten Differenzenquotienten von f(x). Diese Ausdrücke spielen eine wichtige Rolle in der Interpolationsrechnung, wo ihr enger Zusammenhang mit der n-ten Ableitung der Funktion f(x) bereits deutlich hervortritt. Nach H. A. Schwarz[1]) gilt für reelle Funktionen f(x) der reellen Variablen x der Mittelwertsatz

$$[x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f = \overset{(n)}{f}(\xi),\ \xi = \text{passender Mittelwert zw. den } x_\nu,$$

wenn f(x) in dem größten von den x_ν gebildeten Intervalle n-mal differenzierbar ist. Daraus ergibt sich, Existenz und Stetigkeit von $\overset{(n)}{f}(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = a$ vorausgesetzt, die Limesrelation

$$\lim_{x_0 = a,\ x_1 = a \ldots x_n = a} [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f = \overset{(n)}{f}(a).$$

Über dieses Ergebnis ist dann Stieltjes[2]) hinausgelangt, indem er bewies, daß diese Limesbeziehung immer noch besteht, wenn man nur die Existenz der n-ten Ableitung im Punkte $x = a$ voraussetzt. Allerdings dürfen dann die x_ν nicht mehr beliebig gegen den Punkt $x = a$ rücken,

[1]) H. A. Schwarz. Démonstration élémentaire d'une propriété fondamentale des fonctions interpolaires. Ges. math. Abh. Bd. 2. S. 307—308

[2]) T. J. Stieltjes. Oeuvres complètes T. I. S. 67.

sondern so, daß a immer Mittelwert zwischen den x_ν bleibt. Die Stieltjessche Bedingung für die Existenz von

$$\lim_{x_0=a,\ x_1=a,\ \ldots,\ x_n=a} [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f$$

wo die x in der eben charakterisierten Weise gegen a rücken, ist zwar eine hinreichende, aber keine notwendige. Die bisher noch nicht in Angriff genommene Frage nach der allgemeinsten Bedingung werde ich nun in dieser Arbeit vollständig beantworten. Über diese spezielle Frage hinaus habe ich mir überhaupt die Untersuchung der Zusammenhänge zwischen höheren Differenzenquotienten einer reellen Funktion f (x) und deren Differenzierbarkeitseigenschaften vorgenommen. Man kann sich fragen, in welcher Weise sich bestimmte Eigenschaften einer Funktion und ihrer Ableitungen in dem Verhalten ihrer Differenzenquotienten spiegeln. In dieser Weise charakterisiere ich in meiner Arbeit

1. die Funktionen f (x), für die der n-te Differenzenquotient in einem ganzen Intervalle zwischen zwei endlichen Schranken gelegen ist.
2. Die Funktionen f (x), für die in einem Punkte $x = a$ der Grenzwert
$$\lim_{x_0=a,\ x_1=a,\ \ldots,\ x_n=a} [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f$$
für beliebig nach a rückende x_ν existiert.

2a. Die Funktionen f (x), für die dieser Grenzwert längs eines ganzen Intervalles vorhanden ist.

3. Die Funktionen f (x), für die der Grenzwert
$$\lim_{x_0=a,\ x_1=a,\ \ldots,\ x_n=a} [x_0\, x_1 \ldots x_n]\, f$$
im Punkte $x = a$ existiert, wo jedoch die x_ν mit der oben erwähnten Einschränkung nach a rücken.

3a. Die Funktionen f (x), für die die Eigenschaft 3. längs eines ganzen Intervalles erfüllt ist.

4. Die Funktionen f (x), die in einem ganzen Intervalle nicht negative n-te Differenzenquotienten besitzen.
5. Endlich noch gewisse Funktionen f (x), die zu den Funktionen in 4. in analogem Verhätnis stehen, wie die Funktionen von beschränkter Variation zu den monotonen.

Um noch ein Wort über die Methode zu sagen, die mich zu meinen Ergebnissen geführt hat, so wäre zu erwähnen, daß es im wesentlichen zwei neue Mittelwertrelationen zwischen den n-ten Differenzenquotienten von f (x) und den (n—1)-ten Differenzenquotienten der Ableitung f' (x) sind, die es gestatten, eine Anzahl der obigen Fragen durch vollständige Induktion auf die Fälle $n = 2$ oder $n = 1$, d. h. auf die analogen Fragen bezügl. der ersten und zweiten Differenzenquotienten zurückzuführen. Was dann endgültig zum Ziele führt, sind nur noch Sätze aus der Lehre von den Derivierten stetiger Funktionen.

I. Kapitel.

Algebraische Formeln und Mittelwertbeziehungen.

§ 1.

Die Rekursionsformel und einige damit verwandte Formeln zwischen Differenzenquotienten.

Man definiert die höheren Differenzenquotienten durch folgende Rekursionsformeln[1]):

$$[x_0]\, f = f(x_0)$$
$$[x_0\, x_1]\, f = \frac{[x_0]\, f - [x_1]\, f}{x_0 - x_1}$$
$$[x_0\, x_1\, x_2]\, f = 2 \cdot \frac{[x_0\, x_2]\, f - [x_1\, x_2]\, f}{x_0 - x_1}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(1) \qquad [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f = n \cdot \frac{[x_0\, x_2\, x_3 \ldots x_n]\, f - [x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_n]\, f}{x_0 - x_1}.$$

Man zeigt ohne Mühe durch Schluß von n auf $n+1$ die Gültigkeit der Formel

$$(2) \qquad [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f = n!\left\{\frac{f(x_0)}{\pi'(x_0)} + \frac{f(x_1)}{\pi'(x_1)} + \ldots + \frac{f(x_n)}{\pi'(x_n)}\right\},\quad \pi(x) = \prod_{\nu=0}^{\nu=n}(x - x_\nu).$$

Durch Anwendung bekannter Sätze über Vandermondesche Determinanten erhält man dann leicht einen weiteren Ausdruck für den n-ten Differenzenquotienten

$$(3) \qquad [x_0\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f = n! \cdot \frac{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \ldots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \ldots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \ldots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \ldots & & & & & \\ \ldots & & & & & \\ 1 & x_n & x_n^2 & \ldots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix}}.$$

[1]) N. E. Nörlund. Differenzenrechnung. Berlin 1924. S. 8—9. Die Rekursionsformeln bei Nörlund und bei mir unterscheiden sich nur durch numerische Faktoren die ich lediglich eingeführt habe, um später eine formale Vereinfachung zu erzielen.

Die Ausdrücke (2) und (3) lassen deutlich die Symmetrie des n-ten Differenzenquotienten in den x_ν erkennen. Wir setzen die Zahlen x_ν als paarweise verschieden voraus, da sonst die beiden Ausdrücke für $[x_0 x_1 x_2 \dots x_n]_f$ keinen Sinn haben würden.

Aus den Rekursionsformeln (1) lassen sich leicht eine Anzahl wichtiger algebraischer Relationen zwischen den Differenzenquotienten herleiten. Zunächst können wir die Rekursionsformel (1) selbst verallgemeinern. Es ist nämlich für $n > k$

$$(4) \quad [x_0 x_1 \dots x_n]_f = \binom{n}{k} \cdot [x_0 x_1 \dots x_k]_g, \; g(x) = [x\, x_{k+1}\, x_{k+2} \dots x_n]_f.$$

Zum Beweise setzen wir $n = k + l$, wo wir l konstant lassen. Für $k = 0$ ist die Formel trivial. Wir schließen nun von k auf $k+1$. Es ist für einen $(n+1)$-ten Differenzenquotienten nach (1)

$$[x_0 x_1 \dots x_{n+1}]_f = (n+1) \frac{[x_0 x_2 x_3 \dots x_{n+1}]_f - [x_1 x_2 x_3 \dots x_{n+1}]_f}{x_0 - x_1}$$
$$= (n+1)\binom{n}{k} \frac{[x_0 x_2 x_3 \dots x_{k+1}]_g - [x_1 x_2 x_3 \dots x_{k+1}]_g}{x_0 - x_1}, \; g(x) = [x_1\, x_{k+2} \dots x_{n+1}],$$

wo die rechte Seite nach abermaliger Anwendung von (1) schließlich gleich

$(n+1)\binom{n}{k} \cdot \frac{1}{k+1} [x_0 x_1 \dots x_{k+1}]_g = \binom{n+1}{k+1} [x_0 x_1 \dots x_{k+1}]_g$ wird. Damit haben wir aber auf $k+1$ geschlossen, und die Formel (4) ist für alle positiven ganzen $n > k$ bewiesen.

Wenn wir in (1) x_1 mit x_2 vertauschen und die rechte Seite der so entstandenen Formel der rechten Seite der ursprünglichen gleichsetzen, erhalten wir unmittelbar die Relation zwischen drei $(n-1)$-ten Differenzenquotienten

$$(5) \quad (x_2 - x_0) \cdot [x_0 x_2 x_3 \dots x_n]_f + (x_0 - x_1) \cdot [x_0 x_1 x_3 \dots x_n]_f + (x_1 - x_2) \cdot [x_1 x_2 x_3 \dots x_n]_f = 0.$$

Zum Schluß erwähnen wir noch eine Formel, von der wir später noch Gebrauch machen werden, und die sich durch Addition der Gleichungen

$$n\{[y_1 y_2 \dots y_n]_f - [x_1 y_2 \dots y_n]_f\} = (y_1 - x_1)[x_1 y_1 y_2 \dots y_n]_f$$
$$n\{[x_1 y_2 y_3 \dots y_n]_f - [x_1 x_2 y_3 \dots y_n]_f\} = (y_2 - x_2)[x_1 x_2 y_2 \dots y_n]_f$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$n\{[x_1 \dots x_{n-1} y_n]_f - [x_1 \dots x_{n-1} x_n]_f\} = (y_n - x_n)[x_1 \dots x_n y_n]_f$$

ergibt.

$$(6) \quad n\{[y_1 y_2 \dots y_n]_f - [x_1 x_2 \dots x_n]_f\} = (y_1 - x_1) \cdot [x_1 y_1 y_2 \dots y_n]_f$$
$$+ (y_2 - x_2) \cdot [x_1 x_2 y_2 \dots y_n]_f + (y_3 - x_3) \cdot [x_1 x_2 x_3 y_3 \dots y_n]_f$$
$$+ \dots + (y_n - x_n) \cdot [x_1 x_2 \dots x_n y_n]_f.$$

Hier steht links (abgesehen vom Faktor n) die Differenz zweier $(n-1)$-ter Differenzenquotienten und rechts ein Ausdruck, in dem nur

n-te Differenzenquotienten vorkommen. Damit diese stets einen Sinn haben, wollen wir voraussetzen, daß die Größen $x_1, x_2, \dots, x_n, y_1, y_2, \dots, y_n$ voneinander verschieden sind.

§ 2.

Zwei Mittelwertrelationen zwischen den Differenzenquotienten von f(x) und denen der Ableitung f'(x).

Wir beginnen mit einer Mittelwertbeziehung zwischen einem n-ten Differenzenquotienten der differenzierbaren Funktion $f(x)$ der reellen Variablen x und einem $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$.

Es gilt der

Satz 1. Es sei $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$. Es sei ferner $f(x)$ eine reelle, im Intervalle $\langle x_0, x_n \rangle$[1]) differenzierbare Funktion. Dann gibt es n Stellen $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}$ mit $x_0 < \xi_0 < x_1 < \xi_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < \xi_{n-1} < x_n$ derart, daß

$$[x_0 x_1 x_2 \dots x_n]_f = [\xi_0 \xi_1 \dots \xi_{n-1}]_{f'}$$

ist.

Beweis: Wir setzen $[x_0 x_1 x_2 \dots x_n]_f = R$. Dann ist nach Formel (3)

$$\begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & f(x_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} - \frac{R}{n!} \cdot \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir nun auf der linken Seite dieser Gleichung für x_0 eine Variable x ein, so erhalten wir offenbar eine Funktion von x, die für $x = x_0$, $x = x_1$ verschwindet. Daher können wir das Rollesche Theorem anwenden und eine Stelle ξ_0 angeben, wo die Ableitung dieser Funktion verschwindet. Es ist also

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\xi_0 & \dots & (n-1)\xi_0^{n-2} & f'(\xi_0) \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & f(x_1) \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & f(x_2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} - \frac{R}{n!} \cdot \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2\xi_0 & \dots & (n-1)\xi_0^{n-2} & n\xi_0^{n-1} \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^{n-1} & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \dots & x_2^{n-1} & x_2^n \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = 0.$$

Setzen wir hier in der linken Seite für x_1 eine Variable x ein, so steht dann links eine Funktion von x, die für $x = x_1$, $x = x_2$ verschwindet.

[1]) Wir schreiben im Anschluß an Kowalewski für ein abgeschlossenes Intervall $\langle a, b \rangle$ und für ein offenes (a, b).

Daher gibt es ein ξ_1 zwischen x_1 und x_2, so daß

$$\begin{vmatrix} 0\ 1\ 2\xi_0 \ldots (n-1)\ \xi_0^{\,n-2} & f'(\xi_0) \\ 0\ 1\ 2\xi_1 \ldots (n-1)\ \xi_1^{\,n-2} & f'(\xi_1) \\ 1\ x_2\ x_2^2 \ldots\ldots x_2^{\,n-1} & f(x_2) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 1\ x_n\ x_n^2 \ldots\ldots x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} - \frac{R}{n!} \cdot \begin{vmatrix} 0\ 1\ 2\xi_0 \ldots (n-1)\ \xi_0^{\,n-2} & n\,\xi_0^{\,n-1} \\ 0\ 1\ 2\xi_1 \ldots (n-1)\ \xi_1^{\,n-2} & n\,\xi_1^{\,n-1} \\ 1\ x_2\ x_2^2 \ldots\ldots x_2^{\,n-1} & x_2^{\,n} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 1\ x_n\ x_n^2 \ldots\ldots x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = 0$$

ist. Jetzt können wir wiederum für x_2 eine Variable x einsetzen und dieses Verfahren in der gleichen Weise wie vorhin fortsetzen. Dann gelangen wir schließlich zu der Gleichung

$$\begin{vmatrix} 0\ 1\ 2\xi_0 \ldots (n-1)\ \xi_0^{\,n-2} & f'(\xi_0) \\ 0\ 1\ 2\xi_1 \ldots (n-1)\ \xi_0^{\,n-2} & f'(\xi_1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\ 1\ 2\xi_{n-1} \ldots (n-1)\ \xi_{n-1}^{n-2} & f'(\xi_{n-1}) \\ 1\ x_n\ x_n^2 \ldots\ldots x_n^{n-1} & f(x_n) \end{vmatrix} - \frac{R}{n!} \cdot \begin{vmatrix} 0\ 1\ 2\xi_0 \ldots (n-1)\ \xi_0^{\,n-2} & n\,\xi_0^{\,n-1} \\ 0\ 1\ 2\xi_1 \ldots (n-1)\ \xi_1^{\,n-2} & n\,\xi_1^{\,n-1} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ 0\ 1\ 2\xi_{n-1} \ldots (n-1)\ \xi_{n-1}^{n-2} & n\,\xi_{n-1}^{n-1} \\ 1\ x_n\ x_n^2 \ldots\ldots x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = 0,$$

woraus ersichtlich der angekündigte Satz erhellt.

Anmerkung. Man kann den Satz 1. sofort verallgemeinern. Ist nämlich $f(x)$ in $\langle x_0, x_n \rangle$ k-mal differenzierbar ($k \leqq n$), so braucht man den Satz 1. nur k-mal nach einander anzuwenden, und man erhält mühelos die Mittelwertrelation $[x_0\ x_1 \ldots x_n]_f = [\eta_0\ \eta_1 \ldots \eta_{n-k}]_{f^{(k)}}$, wo $x_0 < \eta_\nu < x_n$ für $\nu = 1, \ldots, n-k$ ist. Der Spezialfall $k = n$ liefert den Mittelwertsatz von Schwarz:

$$[x_0\, x\eta \ldots x_n]_f = \overset{(n)}{f}(\xi), \quad x_0 < \xi < x_n.$$

Satz 1. besagt, grob gesprochen, daß man zu einem gegebenen n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ stets einen ihm gleichen $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$ finden kann. Wir wollen jetzt noch einen Satz beweisen, der gewissermaßen das Umgekehrte leistet. Zu diesem Zweck leiten wir zunächst eine rein algebraische Relation zwischen einem $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$ und einfachen Grenzwerten n-ter Differenzenquotienten von $f(x)$ ab.

Es sei $f(x)$ an der Stelle $x = x_1$ differenzierbar. Wenn wir in dem n-ten Differenzenquotienten

$$[x\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f = n \cdot \frac{[x\, x_2 \ldots x_n]_f - [x_1\, x_2 \ldots x_n]_f}{x - x_1}$$

x irgendwie nach x_1 konvergieren lassen, so kommt, wie man etwa aus (2) ersehen kann, immer ein Grenzwert heraus[1]). Wir bezeichnen ihn einfach mit $[x_1\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f$.

Dann gilt der Satz:

Ist $f(x)$ an den Stellen $x = x_1$, $x = x_2, \ldots, x = x_n$ differenzierbar, so ist $n \cdot [x_1 x_2 x_3 \ldots x_n]_f = [x_1\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f + [x_1\, x_2\, x_2\, x_3 \ldots x_n] + \ldots + [x_1 \ldots x_{n-1}\, x_n\, x_n]_f$.

[1]) Es ist offenbar $[x\, x_2 \ldots x_n]_f$ an der Stelle $x = x_1$ differenzierbar, wie man am bequemsten aus dem Ausdrucke (2) ersehen kann. Man erkennt ebenfalls leicht, daß dies auch nur dann der Fall ist, wenn $f(x)$ an der Stelle $x = x_1$ differenzierbar ist.

Um das zu beweisen, schließen wir am besten von n auf $n+1$. Für $n = 1$ ist der Satz trivial; denn dann ist

$$[x_1]_{f'} := f'(x_1) = [x_1\, x_1]_f.$$

Wir nehmen an, die Richtigkeit unserer Formel sei bereits für die $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$ erwiesen. Es ist dann nach der Rekursionsformel (1) für einen n-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$

$$(n+1) \cdot [x_1 x_2 x_3 \ldots x_{n+1}]_{f'} = n(n+1)\ \frac{[x_1\, x_3 \ldots x_{n+1}]_{f'} - [x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_{f'}}{x_1 - x_2},$$

und nach weiterer Umformung

$$\begin{aligned}(n+1) \cdot [x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f = \frac{n+1}{x_1 - x_2} \Big\{ & [x_1\, x_1\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f + [x_1\, x_3\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f \\ & + \ldots + [x_1\, x_3 \ldots x_{n+1}\, x_{n+1}]_f - [x_2\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f - [x_2\, x_3\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f \\ & - \ldots - [x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}\, x_{n+1}]_f \Big\}.\end{aligned}$$

Fügen wir hier in der geschweiften Klammer noch $[x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f - [x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f$ hinzu, so können wir die positiven und negativen Glieder derart zu Paaren zusammenfassen, daß wir auf jedes Paar die Formel (1) anwenden können. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}(n+1)[x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_{f'} = {} & (n+1) \cdot \frac{[x_1\, x_1\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f - [x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f}{x_1 - x_2} \\ & + (n+1) \cdot \frac{[x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f - [x_2\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f}{x_1 - x_2} \\ & + (n+1) \cdot \frac{[x_1\, x_3\, x_3 \ldots x_{n+1}] - [x_2\, x_3\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f}{x_1 - x_2} \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ & + \ldots\ldots\ldots\ldots \\ = {} & [x_1\, x_1\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f + [x_1\, x_2\, x_2\, x_3 \ldots x_{n+1}]_f + \ldots + [x_1\, x_2 \ldots x_n\, x_{n+1}\, x_{n+1}]_f.\end{aligned}$$

Das ist aber die zu beweisende Formel für die n-ten Differenzenquotienten vom $f'(x)$. Damit wäre die allgemeine Gültigkeit dieser Formel sichergestellt.

Die eben bewiesene Formel gestattet nun mühelos den Nachweis einer für uns sehr wichtigen Mittelwertrelation.

Satz 2. Es sei $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$. Ist $f(x)$ eine reelle, im Intervalle $\langle x_1, x_n \rangle$ differenzierbare Funktion, so gibt es eine Stelle ξ in (x_1, x_n), so daß

$$[x_1\, x_2 \ldots x_n]_{f'} = [\xi\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f$$

ist.

Beweis: Da $f(x)$ in $\langle x_1, x_n \rangle$ differenzierbar ist, ist die Funktion $F(x) = [x\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f$ sicherlich stetig in $\langle x_1, x_n \rangle$. Wir können nun die eben hergeleitete Formel so schreiben:

$$[x_1\, x_2 \ldots x_n]_{f'} = \frac{F(x_1) + F(x_2) + \ldots + F(x_n)}{n}$$

Da rechts ein Mittelwert zwischen Maximum und Minimum von $F(x)$ in $\langle x_1, x_n \rangle$ steht, so gibt es ein ξ in (x_1, x_n), so daß die rechte Seite $= F(\xi)$ wird. Damit ist unser Mittelwertsatz bewiesen. Es hätte übrigens die Voraussetzung genügt, daß $f(x)$ nur an den Stellen x_ν differenzierbar, sonst aber in $\langle x_1, x_n \rangle$ stetig ist.

Es könnte vorkommen, daß das ξ unseres Satzes einem der x_ν gleich ist, daß also dann rechts kein gewöhnlicher Differenzenquotient, sondern der Grenzwert eines solchen steht. Das ist für unsere Untersuchungen durchaus kein Nachteil, da alle Gleichungen und Ungleichungen für Differenzenquotienten, bei denen Satz 2. zur Anwendung kommen wird, auch für Grenzwerte solcher gültig bleiben.

II. Kapitel.

Über Grenzwerte der n-ten Differenzenquotienten reeller Funktionen.

§ 1.

Ein Satz über die Schwankung der n-ten Differenzenquotienten.

Wir wollen in diesem Paragraphen zunächst eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür angeben, daß die n-ten Differenzenquotienten einer reellen Funktion $f(x)$ in einem ganzen Intervalle absolut genommen unter einer endlichen Schranke liegen. Zu diesem Zweck beweisen wir vorerst den

Hilfssatz. Sind die n-ten Differenzenquotienten $(n \geq 2)$ der in $\langle a, b \rangle$ definierten reellen Funktion $f(x)$ beschränkt, so ist $f(x)$ in diesem Intervalle differenzierbar.

Beweis: Es sei also $|[x_0 x_1 x_2 \dots x_n]f| \leq M$ für $a \leq x_\nu \leq b$.

Wenden wir hier die Formel (4) mit $k = 2$ an, so folgt daraus

$$|[x_0 x_1 x_2 x_3 \dots x_n]f| = \binom{n}{2} \cdot \left|[x_0 x_1 x_2]g\right| \leq M, \qquad g(x) = [x\, x_3 \dots x_n]f,$$

$$\text{d. h. } \left|[x_0 x_1 x_2]g\right| \leq 2M' = \frac{M}{\binom{n}{2}} \text{ oder}$$

$$\left|\frac{g(x_2) - g(x_0)}{x_2 - x_0} - \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}\right| \leq M' \cdot |x_2 - x_1|.$$

Das besagt, daß die Differenzenquotienten

$$\frac{g(x_2) - g(x_0)}{x_2 - x_0}, \quad \frac{g(x_1) - g(x_0)}{x_1 - x_0}$$

von $g(x)$ beliebig wenig voneinander differieren, sobald nur x_1, x_2 genügend nahe bei dem festgehaltenen x_0 liegen. Daraus folgt ohne weiteres die Differenzierbarkeit von $g(x)$ für $x = x_0$. Da x_0 im Intervalle $\langle a, b \rangle$ beliebig war und nur von den x_ν $(\nu = 3, \dots, n)$ verschieden sein mußte, ist $g(x)$ für alle diese Stellen differenzierbar. Aus der Differenzierbarkeit von $g(x) = [x\, x_3 \dots x_n]f$ ergibt sich aber auch die von $f(x)$[1]). Um uns von der Beschränkung durch die Ausnahmepunkte $x_3, x_4, \dots, x_n$ frei zu machen, brauchen wir nur zu beachten, daß man hinterher die Stellen $x_3, \dots, x_n$ passend abändern kann. Daher ist $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ ausnahmslos differenzierbar.

Wir sind nun ohne weiteres imstande, den folgenden Satz zu beweisen:

Satz. Dafür, daß die n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ im Intervalle $\langle a, b \rangle$ dem Betrage nach nirgends oberhalb einer festen positiven Schranke M liegen, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist, und daß die Derivierten[2]) der $(n-1)$-ten Ableitung dem Betrage nach in diesem Intervalle nicht oberhalb M liegen.

Beweis: Für $n = 1$ folgt der Satz leicht aus dem bekannten Satze, daß die Derivierten einer stetigen Funktion und deren erste Differenzenquotienten in jedem Intervalle dieselbe obere und untere Grenze besitzen. Nehmen wir nun die Gültigkeit unseres Satzes für $n = k \geq 1$ bereits als erwiesen an. Dann schließen wir folgendermaßen auf den Fall $n = k + 1$. Ist für $a \leq x_\nu \leq b$ stets

$$|[x_0 x_1 x_2 \dots x_{k+1}]f| \leq M,$$

so folgt aus dem Hilfssatz zunächst die Existenz von $f'(x)$ in $\langle a, b \rangle$. Daher können wir den Satz 2. von Kap. I. anwenden und wir erhalten

$$|[x_0 x_1 \dots x_k]f'| = |[\xi\, x_0 x_1 \dots x_k]f| \leq M \text{ für } a \leq x_\nu \leq b.$$

Ist umgekehrt

$$|[x_0 x_1 \dots x_k]f'| \leq M \text{ für } a \leq x_\nu \leq b,$$

so liefert Satz 1. von Kap. I. sofort die Ungleichung

$$|[x_0 x_1 \dots x_{k+1}]f| = |[\xi_0 \xi_1 \dots \xi_k]f'| \leq M \text{ für } a \leq x_\nu \leq b.$$

Damit ist gezeigt, daß die $(k+1)$-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ dann, und nur dann, dem Betrage nach nicht oberhalb M liegen, wenn $f'(x)$ in $\langle a, b \rangle$ existiert, und die k-ten Differenzenquotienten von

---

[1]) Man beachte Fußnote auf S. 10.

[2]) Unter einer Derivierten von $h(x)$ wollen wir bis auf weiteres obere oder untere Derivierte von $h(x)$ an der Stelle x verstehen. Wir schreiben dafür $\overline{D}h(x)$ bzw. $\underline{D}h(x)$ und als Abkürzung für beide einfach $Dh(x)$.

$f'(x)$ in $\langle a, b \rangle$ dasselbe tun. Da wir unseren Satz für $n = k$ als richtig voraussetzten, brauchen wir ihn jetzt nur auf die Funktion $f'(x)$ anzuwenden, woraus dann unser Satz sofort für den Fall $n = k + 1$, und somit allgemein als richtig erhellt.

Wir wollen diesem Satze schließlich noch folgende, etwas allgemeinere Form geben:

Satz 1. Ist für $a \leqq x_\nu \leqq b$ stets $A \leqq [x_0 x_1 \ldots x_n] \leqq B$, so ist $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ n-mal differenzierbar, und es ist in $\langle a, b \rangle$

$$A \leqq D \overset{(n-1)}{f}(x) \leqq B, \text{ und umgekehrt.}$$

Kürzer ausgedrückt: Die n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ haben in $\langle a, b \rangle$ die gleiche obere und untere Grenze, wie die Derivierten von $\overset{(n-1)}{f}(x)$, wenn diese Grenzen endlich sind.

Beweis: Ich setze $g(x) = f(x) - \frac{A+B}{2 \cdot n!} x^n$. Dann folgt leicht aus dem Determinantenausdruck (3) für die Differenzenquotienten von $g(x)$ und $f(x)$ $[x_0 x_1 \ldots x_n]g = [x_0 x_1 \ldots x_n]f - \frac{A+B}{2}$. Dann ist für die Funktion $g(x)$ $-\frac{B-A}{2} \leqq [x_0 x_1 \ldots x_n]g \leqq +\frac{B-A}{2}$ oder $|[x_0 x_1 \ldots x_n]g| \leqq \frac{B-A}{2}$. Damit haben wir den Anschluß an den oben bewiesenen Satz erreicht. Alles weitere folgt dann als selbstverständlich.

Dieser Satz ist offenbar eine Verallgemeinerung des bekannten Satzes, daß obere und untere Derivierte einer stetigen Funktion in jedem Intervalle dieselbe obere und untere Grenze wie die ersten Differenzenquotienten besitzen. Das ist ja auch nur der Spezialfall $n = 1$ des Satzes 1., für den Fall, daß diese Grenzen endlich sind.

§ 2.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x_0 = a, \ldots, x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f$.

Es kann vorkommen, daß die n-ten Differenzenquotienten $[x_0 x_1 \ldots x_n] f$ einer reellen Funktion $f(x)$ einen Grenzwert besitzen, falls die x_ν alle beliebig, aber gleichzeitig gegen einen festen Punkt a rücken. Der Deutlichkeit halber will ich das präzise formulieren. Ich schreibe $\lim\limits_{x_0 = a, \ldots, x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f = L$, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\eta > 0$ gibt, so daß $|[x_0 x_1 \ldots x_n] f - L| \leqq \varepsilon$ ist, sobald nur $|x_\nu - a| \leqq \eta$ $(\nu = 0, 1, \ldots, n)$ ist.

Auf die Frage, wann dieser Grenzwert existiert, antwortet der

Satz 2. Für die in der Umgebung[1] von $x = a$ definierte reelle Funktion $f(x)$ existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x_0 = a, \ldots, x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f$ dann, und nur dann, wenn $f(x)$ in der Umgebung von $x = a$ $(n-1)$-mal differenzierbar ist, und wenn die Derivierten von $\overset{(n-1)}{f}(x)$ an der Stelle $x = a$ stetig sind. Es existiert dann auch die n-te Ableitung von $f(x)$ an der Stelle $x = a$, und es ist $\overset{(n)}{f}(a) = \lim\limits_{x_0 = a, \ldots, x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f$.

Beweis: Der Beweis ist auf Grund des Satzes 1. des vorigen Paragraphen äußerst einfach. Ist nämlich $[x_0 x_1 \ldots x_n] \to L$ für $x_0 \to a$, $x_1 \to a, \ldots, x_n \to a$, so ist der n-te Differenzenquotient von $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = a$ beschränkt. Daher ist $f(x)$ in der Umgebung von a $(n-1)$-mal differenzierbar. Nach Satz 1. haben nun die n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ und die Derivierten der $(n-1)$-ten Ableitung $\overset{(n-1)}{f}(x)$ in einer Umgebung U des Punktes $x = a$ die gleiche obere bzw. untere Grenze $B(U)$ bzw. $A(U)$. Dann ist unser Satz weiter nichts, als zwei verschiedene Formulierungen für das Bestehen der Limesbeziehungen $B(U) \to L$, $A(U) \to L$, wenn die Umgebung U auf den Punkt $x = a$ zusammenschrumpft. Die Existenz der n-ten Ableitung von $f(x)$ an der Stelle von $x = a$ ist eine einfache Folge davon. Denn der erste Differenzenquotient $\frac{\overset{(n-1)}{f}(x') - \overset{(n-1)}{f}(a)}{x' - a}$ ist zwischen der oberen und unteren Grenze der Derivierten $D \overset{(n-1)}{f}(x)$ in $\langle a, x \rangle$ enthalten. Nebenbei folgt selbstverständlich, daß $\lim\limits_{x_0 = a, \ldots x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f = \overset{(n)}{f}(a)$ ist.

Setzt man die Existenz der n-ten Ableitung von $f(x)$ in der ganzen Umgebung von $x = a$ voraus, so ist nach Satz 2. die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x_0 = a, \ldots, x_n = a} [x_0 x_1 \ldots x_n] f$ gleichbedeutend mit der Stetigkeit von $\overset{(n)}{f}(x)$ bei $x = a$. Daß diese Bedingung hinreicht, folgt ja auch schon aus der auf S. 10 erwähnten Mittelwertformel von Schwarz.

Mit Hilfe unseres Satzes 2. erhalten wir auch sofort die Antwort auf die Frage, wann der obige Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ in jedem Punkte eines ganzen Intervalles existiert.

[1] Unter Umgebung des Punktes $x = a$ kann hier auch eine einseitige Umgebung dieses Punktes verstanden werden. Dann bleiben alle Aussagen gültig, wenn sie auf diese einseitige Umgebung bezogen werden.

Ist das der Fall, so muß $f(x)$ in diesem Intervalle jedenfalls n-mal differenzierbar sein. Ausserdem muß sich $\overset{(n)}{f}(x)$ überall stetig verhalten. Also gilt der

Satz 3. Der Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ $\lim\limits_{x_0=\xi,\ldots,x_n=\xi} [x_0 x_1 \ldots x_n]_f$ existiert dann, und nur dann, in jedem Punkte ξ des Intervalles $\langle a, b\rangle$, wenn $f(x)$ in diesem Intervalle n-mal stetig differenzierbar ist. Es ist dann für alle ξ aus $\langle a, b\rangle$

$$\lim_{x_0=\xi,\ldots,x_n=\xi} [x_0 x_1 \ldots x_n]_f = \overset{(n)}{f}(\xi).$$

§ 3.

Die notwendige und hinreichende Bedingung für die Existenz von $\lim\limits_{x_0=a,\ldots,x_n=a} [x_0 x_1 \ldots x_n]_f$, wo die x_ν von beiden Seiten in den Punkt $x=a$ hineinrücken.

Während wir im vorigen Paragraphen uns mit dem Verhalten des n-ten Differenzenquotienten $[x_0 x_1 \ldots x_n]_f$ bei beliebig gegen einen gemeinsamen Grenzpunkt rückenden x_ν beschäftigt haben, wollen wir jetzt das Grenzverhalten von $[x_0 x_1 \ldots x_n]_f$ untersuchen, wenn die x_ν derart gegen den festen Punkt a streben, daß a niemals außerhalb des kleinsten, die x_ν enthaltenden Intervalles zu liegen kommt[1]).

Diese beiden verschiedenartigen Grenzprozesse unterscheiden sich ähnlich, wie im Falle $n = 1$. Denn da besagt ja die Existenz von $\lim\limits_{x'=a-0,\,x''=a+0} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$ die Existenz von $f'(a)$, jedoch die von $\lim\limits_{x''=a,\,x'=a} \frac{f(x'')-f(x')}{x''-x'}$ ausserdem noch die Stetigkeit der Derivierten von $f(x)$ an der Stelle $x=a$.

Wir bemerken nebenbei zunächst, daß die beiden Grenzprozesse $\lim\limits_{x_1=a,\ldots,x_n=a} [x_0 x_1 \ldots x_n]_f$, wobei die x_ν so nach a rücken, daß a niemals außerhalb des kleinsten sie enthaltenden Intervalles zu liegen kommt, und der Grenzprozeß $\lim\limits_{x_1=a,\ldots,x_n=a} [a x_1 x_2 \ldots x_n]_f$ vollkommen äquivalent sind. Offenbar ist der zweite Grenzprozeß im ersten enthalten. Daß auch der erste stets zu einem Limes führt, wenn es der zweite tut, folgt leicht aus der Formel (5) auf S. 8. Wenn nämlich a nicht außerhalb des von den x_ν eingeschlossenen Intervalles liegt und nicht schon selbst unter den x_ν vorkommt, so können wir annehmen, daß etwa $x_0 < a < x_1$ ist.

[1]) Das Studium dieses Grenzprozesses ist auch interessanter als das des im vorigen Paragraphen behandelten.

Dann ist aber nach Formel (5) auf S. 8

$$[x_0 x_1 x_2 \ldots x_n]_f = \frac{(x_1 - a)\cdot[a x_1 x_2 \ldots x_n]_f + (a - x_0)\cdot[a x_0 x_2 \ldots x_n]_f}{x_1 - x_0},$$

d. h. $[x_0 x_1 x_2 \ldots x_n]_f$ ist Mittelwert zwischen zwei n-ten Differenzenquotienten der Form $[a x_1' x_2' \ldots x_n']$. Es kommt also auf dasselbe hinaus, ob wir den Grenzprozeß $\lim\limits_{x_0=a,\ldots,x_n=a} [x_0 x_1 \ldots x_n]_f$, wo die x_ν in der eben erklärten Weise nach a streben, oder den Grenzprozeß $\lim\limits_{x_1=a,\ldots,x_n=a} [a x_1 \ldots x_n]_f$ studieren.

Um nun die Frage, wann dieser Grenzprozeß zu einem Limes führt, behandeln zu können, beweisen wir zuvor den

Hilfssatz a). $\varphi(x)$ sei an der Stelle $x=a$ stetig. λ sei eine feste positive Zahl. Weiter sei

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{D}\varphi(x) + \lambda\cdot\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a},\quad \underline{\Phi}(x) = \underline{D}\varphi(x) + \lambda\frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a}.$$

Streben hier die beiden Ausdrücke für $x \to a$ einem Limes zu, und zwar beide dem gleichen, so konvergieren auch die einzelnen Summanden rechts, wenn x nach a strebt. Genauer ausgedrückt: Aus

$$\overline{\Phi}(x) \to L,\quad \underline{\Phi}(x) \to L \text{ für } x \to a \text{ folgt:}$$

$$\lim_{x=a} \overline{D}\varphi(x) = \lim_{x=a} \underline{D}\varphi(x) = \varphi'(a) = \frac{L}{1+\lambda}.\text{[1])}$$

Beweis: Wir können unbeschadet der Allgemeinheit annehmen, daß $a = \varphi(a) = 0$ und $L = 0$ ist. Dann ist

$$\overline{\Phi}(x) = \overline{D}\varphi(x) + \lambda\frac{\varphi(x)}{x},\quad \underline{\Phi}(x) = \underline{D}\varphi(x) + \lambda\frac{\varphi(x)}{x}.$$

Wir setzen $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x}$. Wir haben zu zeigen, daß $\lim\limits_{x=0} \psi(x) = 0 = \varphi'(0)$ ist. Um das nachzuweisen, gehen wir folgendermaßen vor. Zunächst ist in der Umgebung von $x=0$ $\varphi(x)$, und damit auch $\psi(x)$ stetig, da die Derivierten von $\varphi(x)$ in genügender Nähe von $x=0$ endlich sind. Übrigens genügt es vollständig, wenn wir unseren Hilfssatz für eine einseitige Umgebung von $x=0$, etwa für $x>0$ beweisen. Denn gilt er für die rechte und linke Umgebung, so ist er offensichtlich auch für die volle Umgebung richtig.

Wegen $\varphi(x) = x\cdot\psi(x)$ ist

$$(') \qquad \overline{D}\varphi(x) = \psi(x) + x\,\overline{D}\psi(x),\quad \underline{D}\varphi(x) = \psi(x) + x\,\underline{D}\psi(x)$$

für $x > 0$. ε sei eine beliebige, aber im folgenden festgehaltene positive

[1]) Die Stetigkeit von $\varphi(x)$ bei $x=a$ ist unentbehrlich, wie das Beispiel der Funktion $\varphi = x^{-\lambda}$, für $x > 0$, $\varphi(0) = 0$ zeigt. Für $\lambda < 0$ ist der Satz falsch. Gegenbeispiel: $\varphi = x^{-\lambda}$.

Zahl. Dann können wir ein $\eta > 0$ finden, sodaß für $0 < x < \eta$ stets $|\overline{\Phi}(x)| \leqq \varepsilon(1+\lambda)$, $|\underline{\Phi}(x)| \leqq \varepsilon(1+\lambda)$ wird. Dann sind $\varphi(x)$ und $\psi(x)$ in $(0,\eta)$ stetig. Wir zerlegen nun das Intervall $(0,\eta)$ in zwei Punktmengen E_1 und E_2. E_1 soll erstens alle Punkte x enthalten, für die $\underline{D}\,\psi(x) \leqq 0 \leqq \overline{D}\,\psi(x)$ ist, d. h. wegen der Gleichungen ('), alle x, für die $\underline{D}\,\varphi(x) \leq \psi(x) \leq \overline{D}\,\varphi(x)$ ist. Für diese Punkte x ist dann auch $\underline{\Phi}(x) = \underline{D}\,\varphi(x) + \lambda\psi(x) \leqq (1+\lambda)\,\psi(x) \leq \overline{D}\,\varphi(x) + \lambda\psi(x) = \overline{\Phi}(x)$. Wegen $|\overline{\Phi}(x)| \leqq \varepsilon(1+\lambda)$, $|\underline{\Phi}(x)| \leqq \varepsilon(1+\lambda)$ ist daher $|\psi(x)| \leqq \varepsilon$. Zu E_1 sollen schliesslich noch die in $(0,\eta)$ gelegenen Häufungspunkte der eben definierten Punktmenge gehören. Wegen der Stetigkeit von $\psi(x)$ ist dann auf der ganzen Menge E_1 $|\psi(x)| \leqq \varepsilon$. Es bleibt noch das Verhalten von $\psi(x)$ auf E_2 zu untersuchen. E_1 ist relativ zu $(0,\eta)$ abgeschlossen, E_2 demnach offen in Bezug auf $(0,\eta)$. Also baut sich E_2 aus einer Menge punktfremder, offener Intervalle auf. Ich behaupte, $\psi(x)$ verläuft in jedem dieser Intervalle monoton. Das folgt leicht daraus, daß ein solches Intervall keinen Punkt von E_1, keinen Punkt x also, für den $\underline{D}\,\psi(x) \leqq 0 \leqq \overline{D}\,\psi(x)$ wäre, enthält. Man bedenke, daß ψ stetig ist und in einem dieser Intervalle keinen Wert mehr als einmal annehmen kann: denn wäre etwa $\psi(\alpha) = \psi(\beta)$, so hätte an einer Stelle ξ zwischen α und β $\psi(x)$ ein Extremum, wo offenbar $\underline{D}\,\psi(\xi) \leq 0 \leq \overline{D}\,\psi(\xi)$ wäre. Um nun endlich zum Ziele zu gelangen, müssen wir zwei Fälle unterscheiden.

a) $x = 0$ ist Häufungspunkt von E_1. $\eta_1 \leqq \eta$ sei der größte Häufungswert der Menge E_1. Auf E_1 ist, wie wir oben gezeigt haben, $|\psi(x)| \leqq \varepsilon$. Die Randpunkte jedes Intervalles von E_2 gehören zu E_1. Da aber $\psi(x)$ in einem solchen Intervall monoton verläuft, ist auch darin $|\psi(x)| \leqq \varepsilon$. Also ist überhaupt $|\psi(x)| \leqq \varepsilon$ in $(0,\eta')$. Damit ist gezeigt: $\psi(x) \rightarrow 0$, für $x \rightarrow 0$ und daher auch $\lim\limits_{x=0} \overline{D}\,\varphi = \lim\limits_{x=0} \underline{D}\,\varphi = 0$.

b) $x = 0$ ist kein Häufungspunkt von E_1. Dann können wir uns η so klein gewählt denken, daß in $(0,\eta)$ kein Punkt von E_1 liegt. Dann verläuft ψ in $(0,\eta)$ monoton. Wäre nun nicht $\psi \rightarrow 0$ für $x \rightarrow 0$, so können wir annehmen, daß dauernd $\psi(x) \geqq \gamma > 0$ in genügender Nähe von $x = 0$ wäre. Nun ist aber für ein passendes $x' < x$ $\overline{D}\,\varphi(x') \geq \frac{\varphi(x) - \varphi(0)}{x} = \psi(x) \geq \gamma$. Dann wäre aber $\overline{\Phi}(x') \geqq (1+\lambda)\cdot\gamma$ [1]) für unendlich viele x' in jeder Umgebung von $x = 0$, was aber der Annahme über $\overline{\Phi}$ widerspricht. Es ist daher $\psi(x) = \frac{\varphi(x)}{x} \rightarrow \varphi'(0) = 0$ für $x \rightarrow 0$, und damit $\lim\limits_{x=0} \overline{D}\,\varphi = \lim\limits_{x=0} \underline{D}\,\varphi = 0$. Damit ist der Hilfssatz bewiesen.

[1]) An dieser Stelle wird die Voraussetzung $\lambda > 0$ ausgenützt.

Dieser Hilfssatz ermöglicht uns den Beweis für den

Satz. Für die reelle Funktion f(x) existiert der Grenzwert $\lim\limits_{x_1=a,\, x_2=a,\, \ldots,\, x_n=a} [a\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f$ dann, und nur dann, wenn f(x) in der Umgebung von $x = a$ $(n-2)$-mal differenzierbar ist und wenn die beiden Derivierten von $\overset{(n-2)}{f}(x)$ an der Stelle $x = a$ eine Ableitung, und zwar beide dieselbe, besitzen.

Beweis: Ich setze $\frac{f(x) - f(a)}{x - a} = g(x)$. Dann ist nach der Formel (4) auf S. 8 für $k = n - 1$

$$[a\, x_1\, x_2 \ldots x_n]_f = n\,[x_1\, x_2 \ldots x_n]_g.$$

Dadurch sind wir offenbar auf die Frage zurückgeführt, zu untersuchen, wann der Grenzwert des $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von g(x) für beliebig nach a rückende x_ν existiert. Diese Frage aber hatten wir schon im vorigen Paragraphen erledigt, und wir können mit Hilfe von Satz 2. bereits eine notwendige und hinreichende Bedingung [1]) für die Existenz des Grenzwertes $\lim\limits_{x_1=a,\, \ldots,\, x_n=a} [a\, x_1 \ldots x_n]_f$ angeben:

Es ist dann, und nur dann $[a\, x_1 \ldots x_n]_f \rightarrow L$ für $x_\nu \rightarrow a$, wenn die Funktion $g(x) = \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$ $(g(a) = f'(a))$ in der Umgebung von $x = a$ $(n-2)$-mal differenzierbar ist, und wenn $\lim\limits_{x=a} \overline{D}\,\overset{(n-2)}{g}(x) = \lim\limits_{x=a} \underline{D}\,\overset{(n-2)}{g}(x) = \overset{(n-1)}{g}(a) = \frac{L}{n!}$ ist.

Diese Bedingung ist jedoch ganz uninteressant, da man aus ihr ohne weiteres noch keine Differenzierbarkeitseigenschaften von f (x) ablesen kann. Wir müssen deshalb diese Bedingung für g (x) noch in eine Bedingung für f (x) umformen. Das geschieht folgendermaßen.

[1]) Es ist wohl zu beachten, daß g (x) für $x = a$ nicht definiert ist, und daß daher im Grenzprozeß $\lim\, [x_1\, x_2 \ldots x_n]\, g$ die x_ν zunächst den Punkt a zu meiden haben was beim Satz 2. nicht vorausgesetzt ist. Wir können jedoch diesen Übelstand beseitigen, wenn wir zeigen, daß sich g (x) an der Stelle $x = a$ stetig ergänzen läßt. Es ist nun $[x_1\, x_2 \ldots x_n]_g = \sum\limits_{0}^{n} g(x_\nu) / \pi'(x_\nu)$, $\pi(x) = (x - x_1) \ldots (x - x_n)$. Setzen wir hier der Deutlichkeit halber $x_1 = x'$, $x_2 = x''$, $\pi(x) = (x - x')(x - x'')\,\pi_1(x)$, so können wir schreiben $\dfrac{\frac{g(x'')}{\pi_1(x'')} - \frac{g(x')}{\pi_1(x')}}{x'' - x'} = [x'\, x''\, x_3 \ldots x_n]\, g - \sum\limits_{3}^{n} \frac{g(x_\nu)}{(x_\nu - x')(x_\nu - x'')\,\pi_1'(x_\nu)}$. Offenbar ist die rechte Seite beschränkt, wenn wir die Punkte $x_3, \ldots, x_n$ in gehöriger Entfernung von a festhalten und die Punkte x' und x'' in genügender Nähe von $x = a$ variieren lassen. Daher existiert $\lim\limits_{x=a} \frac{g(x)}{\pi_1(x)}$, und damit auch $\lim\limits_{x=a} g(x)$. In den obigen Ausführungen dürfen wir daher g (x) auch an der Stelle $x = a$ als stetig erklärt annehmen. Es ist dann $\lim\limits_{x=a} g(x) = \lim\limits_{x=a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = f'(a)$.

Zunächst können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit $L = 0$ setzen, da wir sonst für die Funktion $f_1(x) = f(x) - \frac{L}{n!} x^n$ auf diesen Fall zurückkämen.

a) Es sei $\overline{D}\, g^{(n-2)}(x) \to g^{(n-1)}(a) = 0$, $\underline{D}\, g^{(n-2)}(x) \to g^{(n-1)}(a) = 0$ für $x \to a$ erfüllt. Wegen $f(x) = f(a) + (x-a)\, g(x)$ ist $f(x)$ an der Stelle $x = a$ $(n-1)$-mal differenzierbar. Man erhält dann durch wiederholte Differenziation und schließlich durch Deriviertenbildung die Gleichungen

$$\frac{\overline{D}\, f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \overline{D}\, g^{(n-2)}(x) + (n-1)\frac{g^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(a)}{x-a} \text{ für } x > a,$$

$$\frac{\underline{D}\, f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \underline{D}\, g^{(n-2)}(x) + (n-1)\frac{g^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(a)}{x-a} \text{ für } x < a.$$

Der Voraussetzung nach streben hier die rechten Seiten nach Null für $x \to a$; d. h.: die obere Derivierte von $f^{(n-2)}(x)$ ist an der Stelle $x = a$ differenzierbar (ihre Ableitung verschwindet außerdem). Dasselbe beweist man analog für die untere Derivierte von $f^{(n-2)}(x)$. Damit haben wir aber die in unserem Satze ausgesprochene Bedingung als notwendig erkannt.

b) Die Bedingung ist schließlich noch als hinreichend nachzuweisen. Wir setzen also voraus, daß $f^{(n-2)}(x)$ in der Umgebung von $x = a$ existiert, und daß die Derivierten dieser Funktion an der Stelle $x = a$ eine verschwindende Ableitung besitzen. Zunächst ergibt sich daraus die Stetigkeit dieser Derivierten im Punkte $x = a$, somit die Existenz der $(n-1)$-ten Ableitung von $f(x)$ daselbst, $f^{(n-1)}(a)$. Weiter schließen wir, daß $g(x)$ in der Umgebung von $x = a$ (exkl. $x = a$) $(n-2)$-mal differenzierbar ist,

$$\text{(G)} \quad \begin{aligned} f(x) &= (x-a)\, g(x) + f(a) \\ f'(x) &= (x-a)\, g'(x) + g(x) \\ f''(x) &= (x-a)\, g''(x) + 2\, g'(x) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ f^{(n-2)}(x) &= (x-a)\, g^{(n-2)}(x) + (n-2)\, g^{(n-3)}(x). \end{aligned}$$

(Im Falle $n = 2$ kommt nur die erste dieser Gleichungen in Betracht.)

Zunächst folgt wegen $g(a) = f'(a)$ die Stetigkeit von $g(x)$ im Punkte $x = a$. Nach der zweiten dieser Gleichungen (G) ist dann $\frac{f'(x) - f'(a)}{x-a} = g'(x) + \frac{g(x) - g(a)}{x-a}$. Hier können wir vom Hilfssatz a) S. 17 Gebrauch machen und schließen, daß die erste Ableitung von $g(x)$ im Punkte $x = a$, $g'(a) = \frac{1}{2} f''(a)$ existiert, und daß $g'(x)$ an der Stelle

$x = a$ stetig ist. Dann ist nach der dritten der Gleichungen (G) $\frac{f''(x) - f''(a)}{x-a} = g''(x) + 2\frac{g'(x) - g'(a)}{x-a}$, woraus nach Hilfssatz a) die Existenz von $g''(a) = \frac{1}{3} f'''(a)$ und die Stetigkeit von $g''(x)$ bei $x = a$ folgt. In dieser Weise können wir jetzt fortfahren und endlich schließen, daß $g^{(n-2)}(a) = \frac{f^{(n-1)}(a)}{n-1}$ existiert, und daß $g^{(n-2)}(x)$ bei $x = a$ stetig ist. Für $x > a$ ergibt sich nun leicht aus der letzten der Gleichungen (G)

$$\frac{\overline{D}\, f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \overline{D}\, g^{(n-2)}(x) + (n-1)\frac{g^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(a)}{x-a},$$

$$\frac{\underline{D}\, f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \underline{D}\, g^{(n-2)}(x) + (n-1)\frac{g^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(a)}{x-a}.$$

Nach Voraussetzung streben hier die linken Seiten für $x \to a$ nach Null. Nach Hilfssatz a) muß daher $g^{(n-1)}(a) = 0$ existieren und $\lim\limits_{x=a} \overline{D}\, g^{(n-2)}(x) = \lim\limits_{x=a} \underline{D}\, g^{(n-2)}(x) = 0$ sein. Dasselbe folgt ganz ähnlich für $x < a$. Damit ist aber die Bedingung unseres Satzes auch als hinreichend erwiesen.

Wenn wir aus der Theorie der reellen Funktionen den bekannten Satz[1]) benützen, daß in einem Stetigkeitsintervall einer reellen Funktion deren Hauptderivierte[2]) die gleiche obere und untere Grenze besitzen,[3]) läßt sich zunächst der Hilfssatz a), und dann auch der eben bewiesene Satz etwas feiner formulieren.

Hilfssatz a'). Verfeinerung von Hilfssatz a.). $\varphi(x)$ sei stetig in der Umgebung von $x = a$. λ sei eine positive Konstante. Dann folgt aus

$$\overline{D}^{+} \varphi(x) + \lambda \frac{\varphi(x) - \varphi(a)}{x-a} = \Phi(x) \to L \text{ für } x \to a,$$

daß alle Derivierten von φ bei $x = a$ stetig sind, und daß $\varphi'(a) = \frac{L}{1+\lambda}$ existiert.

---

[1]) C. Carathéodory. Vorlesungen über reelle Funktionen. Leipzig 1918, S. 534.

[2]) Wir bezeichnen die Hauptderivierten einer Funktion mit den vorgesetzten Zeichen $\overline{D}^{+}$, $\overline{D}^{-}$, $\underline{D}^{+}$, $\underline{D}^{-}$ in leicht verständlicher Schreibweise.

[3]) Daraus folgt: Ist eine Hauptderivierte einer stetigen Funktion an einer Stelle stetig, so sind es dort alle Derivierte, und es existiert daselbst auch die Ableitung der Funktion.

Beweis: Wir können uns wieder auf den Fall $x > a$ beschränken. $\overline{\Phi}(x)$ bzw. $\underline{\Phi}(x)$ sollen die obere bzw. untere Limesfunktion von $\Phi(x)$ bezeichnen. Dann ist offenbar nach dem eben erwähnten Satze von den Hauptderivierten einer stetigen Funktion $\overline{\Phi}(x) \geqq \overline{D}\varphi(x) + \lambda \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \geqq \underline{D}\varphi(x) + \lambda \frac{\varphi(x)-\varphi(a)}{x-a} \geqq \underline{\Phi}(x)$. Da mit $\Phi(x) \to L$ für $x \to a$ auch $\overline{\Phi}(x) \to L$, $\underline{\Phi}(x) \to L$ für $x \to a$ ist, haben wir damit den Anschluß an den Hilfssatz a.) erreicht.

Dieser Hilfssatz ermöglicht nun die endgültige Formulierung für unseren Satz auf S. 19:

Satz 4. Der Grenzwert $\lim\limits_{x_1=a,\dots,x_n=a}[a\,x_1\,x_2 \dots x_n]_f$ existiert für die reelle Funktion $f(x)$ dann, und nur dann, wenn $f(x)$ in der Umgebung von $x = a$ $(n-2)$-mal stetig differenzierbar ist, und die obere rechte Derivierte $\overline{D}^+ f^{(n-2)}(x)$ von $f^{(n-2)}(x)$ an der Stelle $x = a$ eine (erste) Ableitung besitzt.

Beweis: Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Daß sie hinreicht, können wir genau wie unter b) im Beweise des Satzes auf S. 19 erschließen. Zunächst folgt aus der Differenzierbarkeit der oberen rechten Derivierten $\overline{D}^+ f^{(n-2)}(x)$ die Stetigkeit derselben bei $x = a$, was die Existenz von $f^{(n-1)}(a)$ zur Folge hat. Genau wie unter b) schließen wir schrittweise, daß $g(x)$ in der Umgebung von $x = a$ $(n-2)$-mal differenzierbar ist. Aus der letzten Gleichung (G) ergibt sich noch die Stetigkeit von $g^{(n-2)}(x)$ für $x \lessgtr a$. Die Stetigkeit für $x = a$ war schon erwiesen worden. Es ist dann für $x > a$

$$\frac{\overline{D}^+ f^{(n-2)}(x) - f^{(n-1)}(a)}{x-a} = \overline{D}^+ g^{(n-2)}(x) + (n-1)\frac{g^{(n-2)}(x) - g^{(n-2)}(a)}{x-a},$$

woraus, da die linke Seite nach Null strebt, für $x \to a$ die Existenz von $g^{(n-1)}(a) = 0$ und die Stetigkeit der oberen rechten Derivierten von $g^{(n-2)}(x)$, somit die aller Derivierten an der Stelle $x = a$ folgt. Dasselbe ergibt sich natürlich für $x < a$. Damit sind wir aber am Ziele.

Wir leiten aus Satz 4. noch ein paar interessante unmittelbare Folgerungen ab. Setzt man voraus, daß $f(x)$ an der Stelle $x = a$ eine n-te Ableitung besitzt, so sind offenbar alle Bedingungen für die Existenz von $\lim\limits_{x_1=a,\dots,x_n=a}[a\,x_1 \dots x_n]_f$ erfüllt und wir erhalten den Satz von Stieltjes[1])

[1]) Siehe Fußnote auf S. 5.

Satz 5. Besitzt $f(x)$ an der Stelle $x = a$ eine n-te Ableitung $f^{(n)}(a)$, so konvergiert der n-te Differenzenquotient $[x_0\,x_1\,x_2 \dots x_n]_f$ nach $f^{(n)}(a)$, wenn alle x_ν so nach a streben, daß a immer Mittelwert zwischen den x_ν bleibt.

Existiert der Grenzwert für sämtliche ξ des Intervalles $a \leqq \xi \leqq b$, so folgt zunächst aus Satz 4. die $(n-1)$-malige Differenzierbarkeit von $f(x)$ in diesem Intervalle. Daraus ergibt sich aber die Existenz von

$$\lim_{x=\xi}\frac{f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(\xi)}{x-\xi} = f^{(n)}(\xi)$$

für alle ξ aus $\langle a, b \rangle$. Also gilt der

Satz 6. Dafür, daß der Grenzwert $\lim\limits_{x_1=a,\dots,x_n=a}[a\,x_1\,x_2 \dots x_n]_f$ in einem ganzen Intervalle $a \leqq \xi \leqq b$ existiert, ist notwendig und hinreichend, daß $f(x)$ in diesem Intervalle n-mal differenzierbar ist.

III. Kapitel.

Funktionen mit durchweg nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten und einige mit diesen verwandte Funktionen.

§ 1.

Funktionen, deren n-te Differenzenquotienten beständig nichtnegativ sind.

Wir beschäftigen uns in diesem Paragraphen mit Funktionen $f(x)$, deren n-te Differenzenquotienten in einem ganzen offenen Intervalle (a, b) niemals negativ sind, für die also

$$[x_0\,x_1 \dots x_n]_f \geqq 0$$

ist, wenn $a < x_\nu < b$.

Im Falle $n = 1$ sind das offenbar die monoton wachsenden, im Falle $n = 2$ die (nach unten) konvexen Funktionen.

Nach Formel (2) auf S. 7 folgt

$$\frac{1}{n!}[x\,x_1 \dots x_n]_f = \frac{f(x)}{(x-x_1)\dots(x-x_n)} - \frac{f(x_1)}{(x-x_1)(x_1-x_2)\dots(x_1-x_n)} - \dots - \frac{f(x_n)}{(x-x_n)(x_n-x_1)\dots(x_n-x_{n-1})}.$$

Setzen wir $(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)=s(x)$, so erhalten wir daraus

$$\frac{(x-x_1)(x-x_2)\dots(x-x_n)}{n!}[x\,x_1\,x_2\dots x_n]_f$$
$$= f(x) - s(x)\cdot\left\{\frac{f(x_1)}{(x-x_1)\cdot s'(x_1)}+\dots+\frac{f(x_n)}{(x-x_n)\,s'(x_n)}\right\}.$$

Hier ist die rechte Seite offenbar $= f(x) - P(x)$, wo $P(x)$ das Polynom von nicht höherem als $(n-1)$-ten Grade ist, das an den Stellen x_ν mit der Funktion $f(x)$ übereinstimmt (Lagrange'sche Interpolationsformel). Dann liest man aus der obigen Gleichung ohne weiteres das mehr geometrische Charakteristikum für die Funktionen $f(x)$, deren n-te Differenzenquotienten in (a, b) nirgends negativ sind, ab:

Es seien $x_1, x_2, \dots, x_n$ beliebige, der Größe nach geordnete Zahlen aus (a, b). $P(x)$ sei das Polynom vom Grade $< n$, das an den Stellen x_ν mit $f(x)$ übereinstimmt. Dann verläuft die Kurve $y = f(x)$ zwischen x_1 und x_2 nirgends oberhalb der Kurve $y = P(x)$.

Im Falle $n = 2$ erhält man so von neuem die (nach unten) konvexen Funktionen.

Für die Funktionen mit nichtnegativen Differenzenquotienten beweisen wir den

Satz 1. Die reelle Funktion $f(x)$ besitzt im Intervalle (a, b) dann, und nur dann durchweg nichtnegative n-te Differenzenquotienten $(n \geqq 2)$, wenn $f(x)$ in (a, b) $(n-2)$-mal differenzierbar ist und $\overset{(n-2)}{f}(x)$ eine in (a, b) (nach unten) konvexe Funktion darstellt.

Beweis: Wenn die $(n+1)$-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ im Intervalle (a, b) der Ungleichung $[x_0\,x_1\dots x_{n+1}]_f \geqq 0$ genügen, so ist $f(x)$ in (a, b) zunächst differenzierbar. Denn wählen wir irgendein positives $\delta < \frac{b-a}{2}$, $n+1$ von einander verschiedene Zahlen a_ν in $(a, a+\delta)$, $\nu = 1, \dots, n+1$, ebenso $n+1$ von einander verschiedene Zahlen b_ν in $(b-\delta, b)$, $\nu = 1, 2, \dots, n+1$, so können wir, wenn $x_1, x_2, \dots, x_{n+1}$ beliebig aus $\langle a+\delta, b-\delta\rangle$ entnommen sind, aus der Formel (6) auf S. 5 schließen

$$(n+1)\left\{[x_1\,x_2\dots x_{n+1}]_f - [a_1\,a_2\dots a_{n+1}]_f\right\}$$
$$= (x_1-a_1)\cdot[a_1\,x_1\,x_2\dots x_{n+1}]_f + \dots$$
$$\dots + (x_{n+1}-a_{n+1})\cdot[a_1\,a_2\dots a_{n+1}\,x_{n+1}]_f \geqq 0,$$

d. h. also $[x_1\,x_2\dots x_{n+1}]_f \geqq [a_1\,a_2\dots a_{n+1}]_f$. Ganz analog ergibt sich $[x_1\,x_2\dots x_{n+1}]_f \leqq [b_1\,b_2\dots b_{n+1}]_f$. Das bedeutet, daß im Intervalle $\langle a+\delta, b-\delta\rangle$ die n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ beschränkt sind. Daraus folgt nach dem Hilfssatze auf S. 12 die Differenzierbarkeit von $f(x)$ in $\langle a+\delta, b-\delta\rangle$ und, da δ beliebig war, auch in (a, b).

Nun beweisen wir unseren Satz durch vollständige Induktion. Der Fall $n = 2$ ist trivial, denn da erhalten wir nur eine Tautologie. Angenommen der Satz sei richtig für ein $n \geqq 2$. Wir wollen beweisen, daß dann der Satz auch für $(n+1)$-ten Differenzenquotienten gültig ist. Sind die $(n+1)$-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ in (a, b) nichtnegativ, ist also $[x_0\,x_1\dots x_{n+1}]_f \geqq 0$ für $a < x_\nu < b$, so folgt nach Satz 2. aus Kapitel I. für die n-ten Differenzenquotienten von $f'(x)$, dessen Existenz wir eben nachwiesen, $[x_0\,x_1\dots x_n]_{f'} = [\xi\,x_0\,x_1\dots x_n]_f \geqq 0$ für $a < x_\nu < b$. Ist umgekehrt nun die letztere Ungleichung für die Funktion $f'(x)$ erfüllt, so folgt aus Satz 1. aus Kapitel I. $[x_0\,x_1\dots x_{n+1}]_f = [\xi_0\,\xi_1\dots\xi_n]_{f'} \geqq 0$ für $a < x_\nu < b$; d. h. wenn $f(x)$ in (a, b) nichtnegative $(n+1)$-te Differenzenquotienten besitzt, so besitzt $f'(x)$ in (a, b) durchweg nichtnegative n-te Differenzenquotienten, und umgekehrt. Wenn wir nun hier für $f'(x)$ den im Falle n als richtig vorausgesetzten Satz anwenden, so folgt, daß die $(n-2)$-te Ableitung von $f'(x)$, also $\overset{(n-1)}{f}(x)$ in (a, b) existiert und (nach unten) konvex ist. Damit ist unser Satz für den Fall $n+1$, also allgemein bewiesen.

Aus dem Satz 1. geht hervor, daß man durch $(n-2)$-malige Integration aller in (a, b) konvexen Funktionen genau die Menge der Funktionen erhält, die im Intervalle (a, b) durchweg nichtnegative n-te Differenzenquotienten besitzen.

Dadurch können wir mit einem Schlage alle Eigenschaften unserer Funktionen aus denen der konvexen ableiten. Bekanntlich ist eine (nach unten) konvexe Funktion $\varphi(x)$ dadurch charakterisiert, daß überall die linke und rechte Ableitung $\varphi'(x-0)$ und $\varphi'(x+0)$ existieren und daß $\varphi'(x-0) \leqq \varphi'(x+0)$, $\varphi'(x' \pm 0) \leqq \varphi'(x'' \pm 0)$ für $x' < x''$ ist. Also sind die Funktionen $f(x)$ mit beständig nichtnegativen Differenzenquotienten diejenigen, die $(n-2)$-mal differenzierbar sind, und deren $(n-2)$-te Ableitung überall einen linken und rechten Differentialquotienten $\overset{(n-1)}{f}(x \pm 0)$ besitzt, wobei immer $\overset{(n-1)}{f}(x-0) \leqq \overset{(n-1)}{f}(x+0)$, $\overset{(n-1)}{f}(x' \pm 0) \leqq \overset{(n-1)}{f}(x'' \pm 0)$ für $x' < x''$ ist.

Überdies ist es interessant, daß man den berühmten Lebesgue'schen Satz von der Differenzierbarkeit monotoner Funktionen auch für die Funktionen mit beständig nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten in ganz analoger Form aufstellen kann. Beim Beweise dieses Satzes brauchen wir übrigens keine besonderen Maßbetrachtungen zu Hilfe zu nehmen. Der Satz läßt sich direkt mit Hilfe unserer bisher gewonnenen Resultate aus dem Lebesgue'schen Theorem selbst herleiten.

Es gilt der

Satz. Sind die n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ im Intervalle (a, b) durchweg nichtnegativ, so existiert im Intervalle $a < \xi < b$, abgesehen von einer Ausnahmemenge vom Lebesgue'schen Maße Null, der Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten $\lim\limits_{x_1=\xi,\, x_2=\xi,\, \dots,\, x_n=\xi} [\xi\, x_1\, x_2 \dots x_n]\, f$.

Beweis: Nach Satz 1. dieses Kapitels und Satz 4. aus Kapitel II.[1]) genügt es, den Beweis für den Fall $n = 2$ zu erbringen. Es ist dann also zu beweisen, daß für eine in $\langle a, b\rangle$ (nach unten) konvexe Funktion $f(x)$ fast überall, d. h. abgesehen von einer Nullmenge, daselbst der Grenzwert des 2. Differenzenquotienten $\lim\limits_{x'=\xi,\, x''=\xi} [\xi\, x'\, x'']\, f$ existiert. Nach Satz 4. aus Kapitel II. haben wir dann nur zu zeigen, daß die obere rechte Derivierte $\overline{D}^+ f(x)$ von $f(x)$, d. h. $f'(x+0)$, fast überall in (a, b) differenzierbar ist. Das ist aber wegen der Monotonëität der Funktion $f'(x+0)$ klar. Denn nach Lebesgue ist eine im Definitionsintervalle monotone Funktion daselbst fast überall differenzierbar.

§ 2.

Funktionen, die sich als Differenz zweier Funktionen mit beständig nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten darstellen lassen.

Zum Schluß beschäftigen wir uns noch mit gewissen reellen Funktionen, die gegenüber den Funktionen mit beständig nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten eine analoge Stellung einnehmen, wie die Funktionen von beschränkter Variation gegenüber den monoton wachsenden, und die für das Studium der sog. linearen Funktionalungleichungen eine gewisse Bedeutung haben.

$f(x)$ sei eine in $\langle a, b\rangle$ definierte reelle Funktion. Wir teilen das Intervall $\langle a, b\rangle$ durch Zwischenpunkte $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_N = b$ in $N > n$ Teilintervalle und bilden mit Hilfe der $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von f folgende Summe:

$$(S) \cdot \big| [x_0\, x_1 \dots x_{n-1}]\, f - [x_1\, x_2 \dots x_n]\, f \big| + \big| [x_1\, x_2 \dots x_n]\, f - [x_2\, x_3 \dots x_{n+1}]\, f \big| + \dots + \big| [x_{N-n}\, x_{N-n+1} \dots x_{N-1}]\, f - [x_{N-n+1} \dots x_N]\, f \big|.$$

Diese Summen haben für alle möglichen Einteilungen des Intervalles $\langle a, b\rangle$ in $N > n$ Teilintervalle eine obere Grenze, die wir die n-te Totalvariation von $f(x)$ in $\langle a, b\rangle$ nennen und mit ${}^{(n)}\overset{b}{\underset{a}{V}} f$ bezeichnen wollen.

[1]) Offenbar läßt sich der Satz 4. aus Kap. II. etwas weniger direkt so formulieren: Der Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ $\lim\limits_{x_1=\xi,\, \dots,\, x_n=\xi} [\xi\, x_1\, x_2 \dots x_n]\, f$ existiert dann, und nur dann, wenn $f(x)$ in der Umgebung des Punktes $x = \xi$ $(n-2)$-mal differenzierbar ist und der Grenzwert des 2. Differenzenquotienten von $f^{(n-2)}(x)$ $\lim\limits_{x_1=\xi,\, x_2=\xi} [\xi\, x_1\, x_2]\, f^{(n-2)}$ existiert.

Was wir in diesem Paragraphen studieren wollen, das sind die Funktionen von beschränkter n-ter Totalvariation. Der Fall $n = 1$ umfaßt die Funktionen von beschränkter Variation, im Falle $n = 2$ spricht man auch von Funktionen von beschränkter Drehung.[1])

Man bestätigt leicht, daß ${}^{(n)}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f+g) \leqq {}^{(n)}\overset{b}{\underset{a}{V}}(f) + {}^{(n)}\overset{b}{\underset{a}{V}}(g)$ ist.

Daraus folgt: Sind $f(x)$ und $g(x)$ in $\langle a, b\rangle$ von beschränkter n-ter Totalvariation, so ist es auch $f(x) + g(x)$. Eine Funktion, deren n-te Differenzenquotienten in $\langle a, b\rangle$ beständig nichtnegativ sind und die an jedem der Randpunkte a und b eine endliche $(n-1)$-te Ableitung besitzt, ist z. B. in $\langle a, b\rangle$ von beschränkter n-ter Totalvariation; denn man sieht leicht, daß für eine solche Funktion $f(x)$ die Absolutzeichen in der Summe (S) weggelassen werden können, und daß diese Summe daher nicht größer als $[x_{N-n+1} \dots x_N]\, f - [x_0 \dots x_n]\, f \leqq f^{(n-1)}(b-0) - f^{(n-1)}(a+0)$ ist. Daher ist auch die Differenz zweier Funktionen mit in $\langle a, b\rangle$ nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten und endlichen $(n-1)$-ten Ableitungen an den Stellen a und b in $\langle a, b\rangle$ von beschränkter n-ter Totalvariation.

Wir wollen beweisen, daß man diese Behauptung auch umkehren kann. Im Falle $n = 1$ ist dies ja altbekannt, den Fall $n = 2$ hat Winternitz[1]) behandelt.

Um den Beweis möglichst einfach führen zu können, beweisen wir zunächst den

Hilfssatz a). Sind die $(n-1)$-ten Differenzenquotienten $(n \geqq 2)$ von $f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ beschränkt, so ist die obere rechte Derivierte $\overline{D}^+ f^{(n-2)}(x_0)$ der immer in dieser Umgebung vorhandenen (sogar stetigen) $(n-2)$-ten Ableitung von $f(x)$ im Punkte x_0 Grenzwert von $(n-1)$-ten Differenzenquotienten $[\xi_0\, \xi_1 \dots \xi_{n-1}]\, f$, wobei die Größen $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n-1}$ je in geeigneter Weise unbegrenzt nach x_0 rücken.

Beweis: Daß aus der Beschränktheit der $(n-1)$-ten Differenzenquotienten von $f(x)$ in der Umgebung von $x = x_0$ die $(n-2)$-malige stetige Differenzierbarkeit von $f(x)$ folgt, war ja schon in Satz 1, Kap. I, enthalten. Alles Weitere erschließen wir durch vollständige Induktion. Der Fall $n = 2$ ist trivial nach der Definition der Derivierten. Ist der Satz schon für ein $n \geqq 2$ als richtig erkannt, so können wir den Fall $n + 1$ folgendermaßen erledigen. Die obere rechte Derivierte $\overline{D}^+ f^{(n-1)}(x_0)$,

[1]) A. Winternitz. Lineare Funktionalungleichungen und konvexe Funktionale. Lpz. Ber., Bd. 69. S. 249.

d. h. die obere rechte Derivierte der $(n-2)$-ten Ableitung von $f'(x)$ läßt sich, was wir ja eben als richtig angenommen haben, sicher beliebig genau durch $(n-1)$-te Differenzenquotienten von $f'(x)$ approximieren. Es gibt also zu jedem $\varepsilon > 0$ und $\delta > 0$ n Zahlen $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}$, aus $\langle x_0 - \delta, x_0 + \delta \rangle$, sodaß $\left| [\xi_0 \xi_1 \ldots . \xi_{n-1}]_{f'} - \overline{D}^+ \overset{(n-1)}{f}(x_0) \right| \leqq \varepsilon$ ist. Nach dem Mittelwertsatz 2. aus Kap. I. gibt es nun eine Zwischenstelle ξ_n zwischen größtem und kleinstem der ξ_ν, sodaß $[\xi_0 \xi_1 \ldots . \xi_{n-1}]_{f'} = [\xi_0 \xi_1 \ldots . \xi_{n-1} \xi_n]_f$ ist. Dann ist aber auch $\left| [\xi_0 \xi_1 \ldots . \xi_{n-1} \xi_n]_f - \overline{D}^+ \overset{(n-1)}{f}(x_0) \right| \leqq \varepsilon$, woraus der Hilfssatz für den Fall n-ter Differenzenquotienten, also allgemein als richtig erhellt.

Aus der Lehre von den Derivierten reeller Funktionen benützen wir noch den

Hilfssatz b).[1] Ist $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ stetig und ist eine der Hauptderivierten von $f(x)$, z. B. $\overline{D}^+ f(x)$ in diesem Intervalle (nach Riemann) integrierbar, so ist es jede andere Hauptderivierte, und man hat

$$\int_a^b \overline{D}^+ f(x)\, dx = \int_a^b \overline{D}^- f(x)\, dx = \int_a^b \underline{D}^+ f(x)\, dx = \int_a^b \underline{D}^- f(x)\, dx = f(b) - f(a).$$

Jetzt sind wir genügend vorbereitet, um den Beweis des oben angekündigten Satzes zu führen.

Satz 2. Eine reelle Funktion $f(x)$, die in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter n-ter Totalvariation $(n \geqq 2)$ ist, läßt sich daselbst als Differenz zweier Funktionen mit in $\langle a, b \rangle$ beständig nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten und endlichen $(n-1)$-ten Ableitungen am Rande des Intervalles darstellen.

Beweis: Wir vergrößern die Summe (S) offenbar niemals, wenn wir die Summanden zu einzelnen Gruppen zusammenfassen und für jede Gruppe die Summe der absoluten Beträge durch den absoluten Betrag der Summe ersetzen. Danach ist also

$$(S') \qquad \begin{gathered} \left| [x_0 \ldots . x_{n-1}]_f - [x_n \ldots . x_{2n-1}]_f \right| + \\ \left| [x_n \ldots . x_{2n-1}]_f - [x_{2n} \ldots . x_{3n-1}]_f \right| + \ldots . + \\ \left| [x_{(k-1)n} \ldots . x_{kn-1}]_f - [x_{kn} \ldots . x_{(k+1)n-1}] \right| \leqq \overset{(n)}{\underset{a}{\overset{b}{V}}}(f) = M, \\ a = x_0 < x_1 < \ldots . < x_{n-1} < x_n < \ldots . < x_{(k+1)n-1} = b. \end{gathered}$$

Daraus folgt zunächst,

$$\left| [z_0 \ldots . z_{n-1}]_f - [y_0 \ldots . y_{n-1}]_f \right| \leqq M,$$
$$\text{für } a \leqq z_0 < \ldots . < z_{n-1} < y_0 < \ldots . < y_{n-1} \leqq b,$$

[1] Lebesgue. Leçons sur l'intégration. Paris. 1904. S. 81.

was ersichtlich die Beschränktheit der $(n-1)$-ten Differenzenquotienten in $\langle a, b \rangle$ nach sich zieht. Daher können wir jetzt von dem Hilfssatz a) Gebrauch machen und in der Summe (S') die Grössen $x_0, x_1, \ldots ., x_{n-1}$ je derart nach $a_0 = a$ laufen lassen, daß $[x_0 x_1 \ldots . x_{n-1}]_f \rightarrow \overline{D}^+ \overset{(n-2)}{f}(a_0)$ erfüllt ist, dann die Größen $x_n, x_{n+1}, \ldots ., x_{2n-1}$ so nach $a_1 > a_0$ laufen lassen, daß $[x_n x_{n+1} \ldots . x_{2n-1}]_f \rightarrow \overline{D}^+ \overset{(n-2)}{f}(a_1)$ erfüllt ist, und so fort. Zuletzt lassen wir $x_{kn}, \ldots ., x_{(k+1)n-1}$ so nach $a_k = b$ wandern, daß etwa $[x_{kn} \ldots . x_{(k+1)n-1}]_f \rightarrow \overline{D}^- \overset{(n-2)}{f}(b)$ herauskommt. Dann folgt sofort, wenn wir $\overline{D}^+ \overset{(n-2)}{f}(x) = v(x)$, $\left((\overline{D}^- \overset{(n-2)}{f}(b) = v(b) \right)$, setzen,

$$|v(a_0) - v(a_1)| + |v(a_1) - v(a_2)| + \ldots . + |v(a_{k-1}) - v(a_k)| \leqq M;$$

d. h. wegen der Willkürlichkeit der Stellen a_ν, daß die obere rechte Derivierte $\overline{D}^+ \overset{(n-2)}{f}(x) = v(x)$ der in $\langle a, b \rangle$ stetigen Funktion $\overset{(n-2)}{f}(x)$ daselbst von beschränkter Variation ist. Wegen der Integrierbarkeit einer solchen Funktion ist dann nach Hilfssatz b) $\overset{(n-2)}{f}(x) = c + \int_a^x v(x)\, dx$.

Da $v(x)$ in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Variation ist, können wir $v(x) = v_1(x) - v_2(x)$ setzen, wo v_1 und v_2 in $\langle a, b \rangle$ monoton wachsen. Also ist

$$\overset{(n-2)}{f}(x) = c + \underline{\int_a^x v_1(x)\, dx} - \underline{\int_a^x v_2(x)\, dx}.$$

Die unterstrichenen Glieder sind offenbar zwei (nach unten) konvexe Funktionen $\varphi_1(x)$ und $\varphi_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$ mit endlichen Ableitungen $\varphi'_1(a+0) = v_1(a+0)$, $\varphi'_1(b-0) = v_1(b-0)$, entspr. für φ_2 und v_2, am Rande des Intervalles. Durch wiederholte Integration der Gleichung $\overset{(n-1)}{f}(x) = \varphi_1(x) - \varphi_2(x)$ erhalten wir schließlich $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$, wo $\overset{(n-2)}{f_1}(x) = \varphi_1(x)$, $\overset{(n-2)}{f_2}(x) = \varphi_2(x)$ in $\langle a, b \rangle$ ist. $f_1(x)$ und $f_2(x)$ müssen also wegen der Konvexität der Funktionen φ_1 und φ_2 nach Satz 1. dieses Kapitels Funktionen sein, die in (a, b) nichtnegative n-te Differenzenquotienten besitzen. Außerdem haben sie am Rande des Intervalles ersichtlich endliche $(n-1)$-te Ableitungen. Damit ist aber unser Satz bewiesen.

Jetzt ergibt sich noch nachträglich leicht, daß $f(x)$ in jedem Punkte von (a, b) eine linke und rechte $(n-1)$-te Ableitung $\overset{(n-1)}{f}(x-0)$, $\overset{(n-1)}{f}(x+0)$ besitzt, da das ja für f_1 und f_2 der Fall ist, und daß jede der Funktionen

$\overset{(n-1)}{f}(x-0)$, $\overset{(n-1)}{f}(x+0)$ (wo sie am Rande des Intervalles nicht definiert sind, können wir sie nach Belieben ergänzen) in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter Variation sind.

Zum Schluß bemerken wir noch, daß der Satz auf S. 25 auch für jede Funktion von beschränkter n-ter Totalvariation gilt, da ja eine solche Differenz zweier Funktionen mit durchweg nichtnegativen n-ten Differenzenquotienten ist.

Satz. Ist $f(x)$ in $\langle a, b \rangle$ von beschränkter n-ter Totalvariation, so existiert fast überall im Intervalle $a < \xi \leq b$ der Grenzwert des n-ten Differenzenquotienten $\lim\limits_{x_1=\xi,\, x_2=\xi, \ldots, x_n=\xi} [\xi\, x_1\, x_2 \ldots x_n]\, f$.

Vita.

Ich, Eberhard Hopf, Sohn des thüringischen Kaufmanns Friedrich Hopf, bin geboren zu Salzburg in Tirol am 17. April 1902. Nach Absolvierung des Gymnasiums zu Berlin-Friedenau — ich bestand die Reifeprüfung im Herbst 1920 — studierte ich an der Universität Berlin sieben Semester Mathematik und Physik, dann im Sommer 1924 noch ein Semester die gleichen Fächer an der Universität Tübingen. Nach Berlin zurückgekehrt, bestand ich Ende Juli 1925 die mündliche Promotionsprüfung. Es sei mir an dieser Stelle gestattet, meinen hochverehrten Lehrern, den Herren Professoren Schmidt und Schur, für die mannigfaltigen mir zuteilgewordenen Anregungen ganz besonders zu danken.